Cirkler og kugler

Fagdidaktisk opgave i matematik

Frederiksberg Seminarium - Forår 2000

Hold: MA 98 B

Vejleder: Steen Groðe

Udarbejdet af:	Line Maria Jensen	980410
	Ditte Maria Lauridsen	980415
	Heidi Yoma Rasmussen	980422

Indholdsfortegnelse

Vi har valgt at arbejde med to geometriske figurer, cirklen og kuglen. Vi mener at arbejdet med geometri giver gode muligheder for at koble teori med praktisk erfaringsdannelse. Dette finder vi også belæg for i Faghæftet for matematik, hvor der i CKF bl.a. står:

"Geometrien rummer gennem visualisering særlige muligheder for at opnå indsigt i faget, og for at støtte problemløsning."

"Gennem aktiviteter, der er relevante for eleverne, skal opnås færdighed i: (bl.a., red.) at arbejde med geometri i plan og rum."

Her opfordres også til at udvide geometriens felt til at danne ramme for en dybere og bredere forståelse via eksperimenteren.

Desuden giver CKF oplagte muligheder for tværfagligt og praktisk arbejde.

I læseplanen for mellemtrinnet står der, at der skal arbejdes med måling og beregning af omkreds, flade og rum samt metoder til bestemmelse af areal ud fra geometriske iagttagelser.

I vores arbejde med denne opgave, bl.a. arbejdet med jordkloden, har vi ofte følt os fristet til at gå videre til også at inddrage rummet, og jorden set i forhold til andre planeter, sol, måne og stjerner. Det har vi dog afholdt os fra pga. gruppens tidsramme, men i et reelt undervisningsforløb ville det være en naturlig forlængelse af emnet.

Florentineren Giotto tegnede i fri hånd en perfekt cirkel og blev derfor udvalgt til at udsmykke den første Peterskirke.

Geometrien set i et historisk perspektiv

I dag har vi en stor viden omkring den jordklode vi bor på, samt det univers der omgiver os. Vi ved at jorden er rund, at den har form som en kugle, og er der noget vi er i tvivl om kan vi blot slå op i et leksikon eller søge vores informationer på internettet. Når vi får disse informationer har andre gjort det matematiske forarbejde for os, og det er sjældent at vi stiller spørgsmålstegn til disse facts.

- Facts der fortæller os om jordens form, dens størrelse og placering i forhold til andre planeter. Selve jorden er ikke nøjagtig kuglerund, den er en smule fladtrykt ved polerne og betegnes derfor som en omdrejningsellipsoide. Derfor er der også forskel på afstanden fra polerne til jordens centrum, 6356 km, og afstanden fra ækvator til jordens centrum, 6371 km, og benævnelsen af jordens radius er således: 6371 km[1].

Endvidere får vi oplyst at jorden er en blandt solsystemets 9 kendte planeter og at den kredser omkring solen i ellipseformede baner med radius af 149,6 mio. km. Jorden roterer omkring en akse der går gennem nordpolen og sydpolen, omløbstiden for denne rotation er et døgn, og fordi jordens overflade skiftevis drejer ind i solens lys og jordens skygge oplever vi dag og nat.

Men hvor stammer al den viden fra og hvorledes blev de første opdagelser gjort?

Vores moderne opfattelse af jordens form, størrelse og placering er udviklet gennem de sidste årtusinde og kan dateres helt tilbage til den klassiske oldtid, hvor babylonierne, ægypterne og grækerne som de første benyttede sig af geometrien for at komme nærmere en forståelse og beskrivelse af den fysiske omverden.

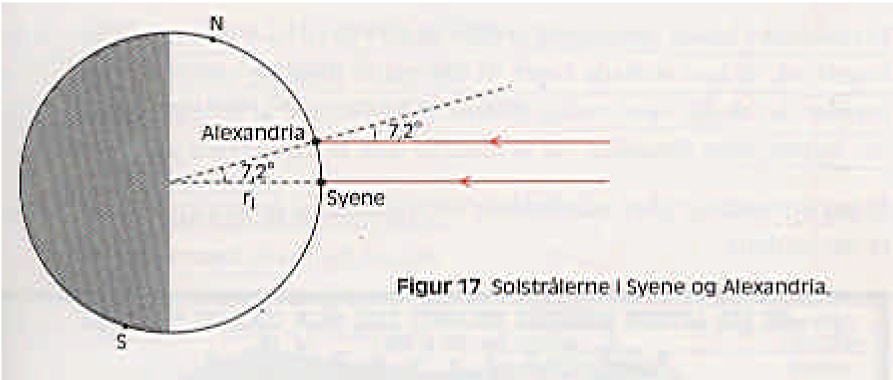
Tidligere var menneskets verdensbillede stærkt præget af mytologien, dvs. af det enkelte folkeslags religiøse overbevisninger, og der var en udbredt forestilling om at jorden var flad, samt at bag horisonten lå afgrunden. Naturfænomener som årstidernes skiften, pludselig opbrud i vejret (torden og lyn), samt solen, månen og de øvrige planeters bevægelser henover stjernehimlen mentes at være iværksat af de almægtige guder[2].

Men i perioden fra ca. 600 f.Kr. til ca. 150 e.Kr. skete der store ændringer i synet på verden. Det græske kulturområde (landene og byerne omkring det østlige Middelhav) blev inspireret af matematikkens mange muligheder for at nå til en dybere forståelse af den verden, de var omgivet af. Den stigende interesse for matematikken menes at være et resultat af samtidens kolonisering i/med fjernere lande[3]. I mødet med andre religioner begyndte enkeltpersoner at stille spørgsmålstegn ved de gamle overleverede sandheder om jordens opbygning. Blandt de første til at forkaste det gamle verdensbillede var pythagoræerne, som frit erklærede, at jorden havde form som en kugle. Dog var det ikke via matematiske beregninger, at de nåede denne konklusion, men snarere fordi de betragtede kuglen som den smukkeste af alle massive objekter[4].

Hen imod den alexandrinske periode skete der store fremskridt indenfor den matematiske viden, som eksempel kan nævnes det store klassiske værk: ”Euklids elementer” fra 300 f.Kr.
Gennem dette og andre matematiske værker som blev til i samme periode nåede geometrien et højdepunkt ved at danne grundlag for en mere naturvidenskabelig arbejdsform. Dette var en

[1] Geometri og funktioner af Claus Jessen.
[2] Geometri og funktioner af Claus Jessen.
[3] Tal og geometri af Flemming Clausen.
[4] Den geometriske dimension af Vagn Lundsgaard Hansen.

udvikling, der fik stor betydning for det videre arbejde i at forstå jordens form og dens placering. Blandt de første til at gøre brug af geometrien i forståelsen af jordens udformning var Eratosthenes ca. 276 f.Kr., hvis beskæftigelse var forskning i astronomi, matematik og korttegning. Eratosthenes' bedrift var at måle jordens omkreds til at være 40.000 km ved hjælp af simpel geometri. En beregning der blev til ved at observere de to byer, Syene og Alexandra. Eratosthenes havde fundet frem til at solen stod lodret over byen Syene ved middagstid og at dens stråler på samme tid dannede en vinkel på 7,2° lodret ned i den mere nord liggende by Alexandria. Da han ligesom pythagoræerne antog at jorden var rund, kunne han ved at dividere cirklens vinkelsum, 360°, med den vinkel solens stråler havde dannet, 7,2°, beregne at jordens omkreds var 50 gange større end afstanden mellem Syene og Alexandria[5].



Billede hentet fra Geometri og funktioner s.67.

På daværende tidspunkt målte man afstande i stadier, 1 stadie = 160 m, og da afstanden mellem disse byer blev målt til 5000 stadier, fandt han at jorden havde en omkreds på 40.000 km, og en radius på 6366 km.(jf. den i dag kendte radius på 6371 km.)

Eratosthenes` beregninger : Afstand : 360° / 7,2° = 50

Jordens omkreds : 50 · 5000 stadier · 160m = 40.000.000 m
= 40.000 km

Jordens radius : 40.000 km / 2π = 6366 km

Beregning af jordens omkreds i dag :

$$O = \pi \cdot d \iff \pi \cdot 12742 \text{ km} = 40.030 \text{ km.}$$

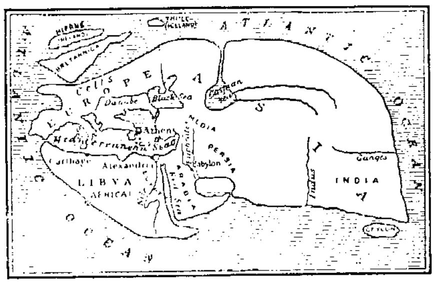
Ved at sammenligne de oplysninger vi har i dag med de beregninger Eratosthenes dengang gjorde ved hjælp af simpel geometri, må vi konkludere at hans resultater kun afviger meget lidt fra de beregninger vi har i dag. Den fejlmargen der er i hans beregning af jordens omkreds kan måske skyldes at Syene og Alexandria ikke befinder sig på samme længdegrad, sådan som Eratosthenes antog.
I begyndelsen af vores tidsregning ca. 150 e.Kr. beviser den alexandrinske matematiker Cladius Ptolemæus via egne observationer, at jorden har form som en kugle. Det har desværre ikke været muligt for os at studere disse beviser nærmere, men vi nævner det fordi det er observationer der har haft betydning for hans udarbejdelse af verdenskort. Ptolemæus var den første der udviklede en

[5] Geometri og funktioner af Claus Jessen.

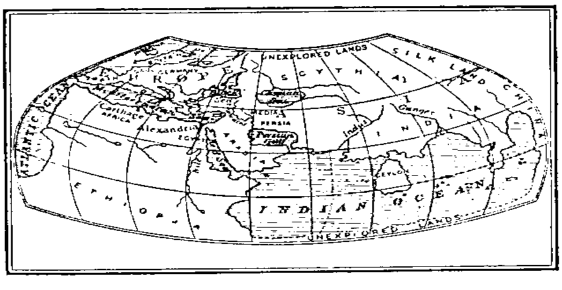
metode til at gengive jordens krumme overflade på et fladt stykke papir, således at krumningen fortsat kunne fornemmes uden at kortet blev alt for fortegnet.

Endvidere var det Ptolemæus der i arbejdet med sit verdenskort indførte begreberne længde og breddegrad, samt besluttede at nord altid skulle vende opad på kortene.[6]

Hecatæus' verdenskort 517 f.Kr. Kortet viser de forestillinger, der herskede på Pythagoras' tid.



Verdenskort efter Eratosthenes, omkring 250 f.Kr.



Ptolemæus' verdenskort.

Ved at sammenligne rekonstruktionerne af Pythagoras`, Eratosthenes` og Ptolemæus` verdenskort ser vi at der er sket en betydelig udvikling i udfærdigelsen af kort på de ca. 700 år der adskiller dem. Det pythagoræiske kort er et udtryk for den tids opfattelse af hvorledes verden, med de lande der var kendt, var opbygget. Landene nede omkring det østlige Middelhav er bedst gengivet. Fx er det tydeligt at se både Spanien, Italien og Grækenland, samt de omkring liggende øer, gengivet som vi

[6] Geometri og funktioner af Claus Jessen mfl. s. 68.

kender dem i dag. Problemet opstår i kortlægningen af de lande, hvortil der givetvis ikke har været den store kolonisering til eller handel med. Norden er gengivet som en stor masse uden øvrige benævnelser, og den sydlige del af Afrika har Pythagoræerne forestillet sig var forbundet med den østlige verdensdel, som så dannede en cirkel slutning op til det ukendte Europa. Kortet viser Pythagoræernes fascination af cirklen. Landene er en næsten tilsluttet cirkel, som omkranses af en ydre cirkel af vand.

Eratosthenes verdenskort fra ca. 250 f.Kr. viser også den del af verden der var kendt dengang. Set i forhold til det tidligere beskrevet verdenskort, er Eratosthenes' kort væsentligt udbygget. Vi kan genkende både England og Irland, dog ikke rigtig proportioneret. Den nordøstlige og sydøstlige verdensdel har fået flere benævnelser, samtidig med at det sydlige Afrika ikke længere er forbundet med Indien. Indien er meget forvokset, men dette kan evt. skyldes den Hellenistiske verdens stigende handel med landet.

Ptolemæus var som tidligere beskrevet den første til at indføre længde- og breddegrader som vi næsten kender dem i dag (dog med vores tids nulpunkt ved ækvator placeret andre steder)[7]. Disse skulle hjælpe til en mere nøjagtig beregning af afstande og arealer landene imellem. Og selvom Ptolemæus' verdenskort godt kunne ligne en tidlig udgave af et Mercator kort, havde det også store fejl, fx er Asiens udstrækning væsentligt overdimensioneret.

I alle 3 kort mangler hele den vestlige del af jordkloden, Nord-, Mellem- og Sydamerika. Men både Eratosthenes og Ptolemæus var nytænkere. Begge mente at det ville være muligt at sejle ad søvejen vestover til Indien, da observationer tydede på at tidevandet i havet ved den vestlige del af verden havde de samme strømninger som man kunne finde i det østlige hav.
På trods af dette tog ingen udfordringen op og der gik 1250 år før deres påstande blev bevist.

Ved indgangen til middelalderen ca. 500 e.Kr. skete der en drastisk tilbagegang i den naturvidenskabelige måde at udforske verden på, som vi har set hos hellenerne. Den katolske kirke anså livet på jorden som en forberedelse til det himmelske paradis og mente derfor ikke det var nødvendigt eller lovligt at forsøge at forstå verden ved hjælp af matematik. Jorden var Guds skaberværk og blev den alligevel beskrevet gennem naturvidenskabelige termer var det snarere et udtryk for Guds genialitet end menneskets matematiske formåen.[8]

De kristne menigheder forkyndte et gammelt verdenssyn, hvor jorden igen blev betragtet som en flad cirkel og i visse gengivelser af datidens verdenskort er der byttet om på nord og øst, da det var en udbredt forestilling at paradis, der var mod øst, skulle ligge øverst. Denne periode af stilstand /dvale varede helt frem til 1400 tallet, hvor visse teoretikere begyndte at oversætte hellenernes gamle udregninger. Mest anvendt var Ptolemæus` kortbetegnelser, og i den stadig stigende lyst til at udforske verdenen greb man også tanken om jorden som en kugle, hvor det ville være muligt at sejle vestover til Indien.
I det næste afsnit om jordens form, størrelse og areal, vil vi se nærmere på mulighederne og besværlighederne ved at projektere den kugleformede jordklode over på et fladt stykke papir / kort.

[7] geometri og funktioner af Claus Jessen.
[8] Den geometriske dimension af Vagn Lundsgaard Hansen s.109.

Noget om Jordkloden og kortlægning

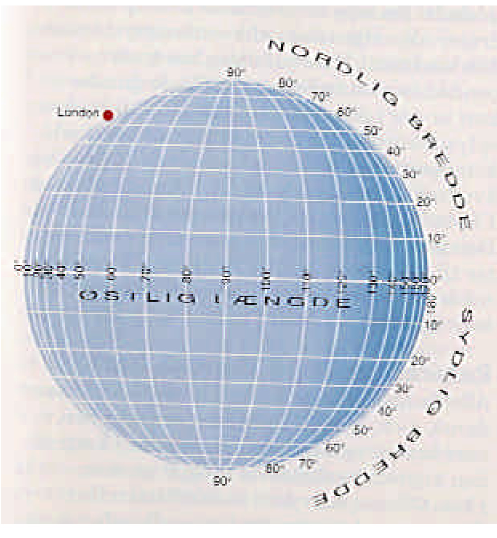
Når man skal lave en model af verden er det smart at modellere med kuglen som basisform, idet jorden som bekendt er ”kuglerund”.

Jordkloden er kugleformet om end den ikke danner en perfekt kugle, hvor den perfekte kugle defineres som en kugle med samme afstand mellem centrum og overflade i et hvilket som helst punkt på overfladen. Af den perfekte kugle kan man skære en skive et hvilket som helst sted på kuglen og få en skive med en omkreds der danner en perfekt cirkel. Hvis en skive skæres, så den går gennem kuglens centrum, danner dens omkreds en ”storcirkel”.

Jordkloden er fladtrykt ved den geografiske nord- og sydpol. Således er afstanden fra jordklodens centrum til polerne mindre end afstanden fra klodens centrum til ækvator. Kloden har således ikke form som en kugle, hvis man skal være præcis, men er en omdrejningsellipsoide. (Seneste viden peger nu på jorden som pæreformet).

Kloden roterer om en akse igennem den geografiske nordpol og sydpol. I et plan, vinkelret på jordaksen, ligger storcirklen ækvator. Ækvator ligger på 0° bredde og bredden på andre punkter angives som afstanden fra ækvator. For at kunne angive et steds placering, har man nemlig inddelt jordkloden i breddegrader og længdegrader. Denne inddeling er rent konventionel og afspejler naturligvis ikke en konkret fysisk opdeling. Kloden er inddelt i $2 \cdot 90$ breddegrader.

Længden på et vilkårligt sted på kloden måles udfra den storcirkel gennem polerne, der passerer gennem det tidligere observatorium i Greenwich ved London. Denne storcirkel blev ved konvention i 1884 fastsat til at repræsentere 0° længde. Alle længdegraderne er storcirkler gennem polerne og de kaldes meridianer. Alle punkters længde kan angives som afstanden mellem 0-meridianen og stedets egen meridian målt i grader. Ligger stedet øst for Greenwich, hedder det østlig længde, ligger det vest for Greenwich hedder det vestlig længde. Kloden er opdelt i $2 \cdot 180$ længdegrader, hvilket medfører at 180° længde, som løber gennem stillhavet og ca. 1° øst for New Zealand, er sammenfaldende for østlig og vestlig længde. Hvor alle længdegraderne er storcirkler er kun en af breddegraderne en storcirkel, det er ækvator på 0°, som tidligere nævnt. De øvrige breddegrader udgør cirkler med en mindre radius end ækvator, hvor de mindste radii findes tættest på de to geografiske poler.



Jorden er jo idealiseret set kuglerund, og den er nem at gengive på en globus, men en globus er i nogle situationer mindre praktisk end en bogform. Man kan lave et plant billede, et landkort, af Jordens krumme flade, men de traditionelle verdenskort er misvisende med hensyn til størrelsesforholdene. Således forekommer lande på den nordlige halvkugle større end de i virkeligheden er, og med Europa som verdens centrum. Afrika, Asien og Sydamerika bliver kun i ringe grad dækket. "Forvrængningen af Europa på 4:1 på traditionelle kort[9] er værd at være opmærksom på, ikke mindst når man arbejder med kort i folkeskolen. Man kan med et alternativt projektionssystem, Peters' projektion, gengive et områdes areal nøjagtigt, men i dette system er gengivelsen af retning til gengæld unøjagtig og jordens virkelige udseende fortegnes ved tilpasningen til målestoksforholdet. Peters' projektion er en udbygning af Archimedes projektion (ca. 287-212 f.Kr.). Det er ikke muligt at gengive en krum flade på et plant billede nøjagtigt med hensyn til form og areal på samme tid. Hvis du prøver at skrælle en appelsin og presse skallen i et ubrudt stykke fladt ud på et bord, vil du forstå det fundamentalt umulige i at overføre en kugleoverflade til et plan uden forvrængninger.

Man kan stille krav til at kortet skal være:

- Arealtro, det betyder at størrelsesforholdet mellem landarealer skal være korrekt.
- Vinkeltro, det betyder at længde- og breddegrader overalt skal skære hinanden under rette vinkler.
- Afstandstro, det betyder at målestokken skal være den samme enten overalt langs en linie eller i alle retninger fra kortets centrum.[10]

men alle tre krav kan ikke opfyldes på samme tid.

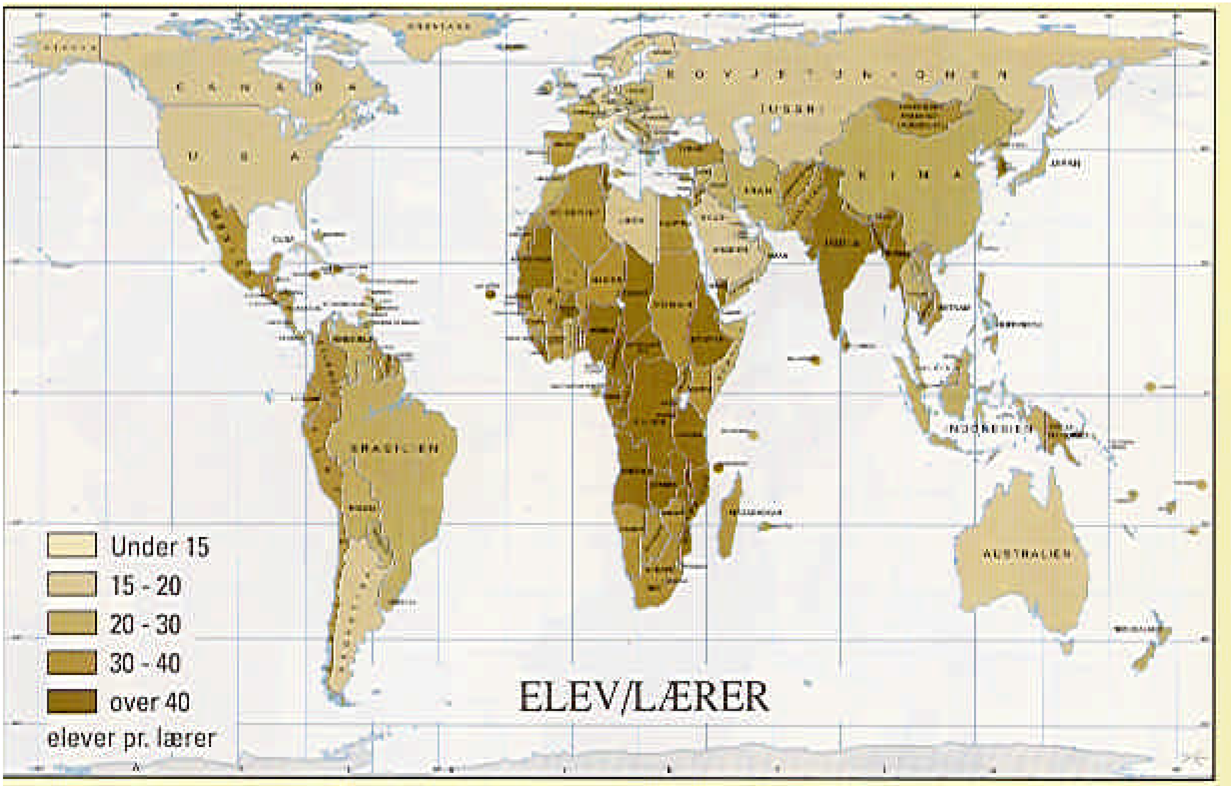
Mere om den tekniske side af sagen følger på side 8.

"I 1493 – et år efter Columbus' første rejse til Amerika – delte Paven den ikke-europæiske verden mellem Europas mest magtfulde lande. Da Mercator fuldendte sit atlas 100 år senere, havde den europæiske dominans spredt sig til resten af verden, og Mercators atlas var da udtryk for Europas geografiske opfattelse af vor klode i kolonialismens tidsalder."[11]
Ovenstående har været et udbredt synspunkt men Mercator projektionen tegner lande nær polerne meget for store i forhold til lande nær ækvator, således at især Grønland og Alaska er overdimensionerede, mens det er landene ved ækvator, der gengives mest "korrekt".
Det er spørgsmålet, om dette absolut er et udtryk for et geografisk hierarki. Mercators projektionssystem er det, vi i opgaven refererer til som det traditionelle.

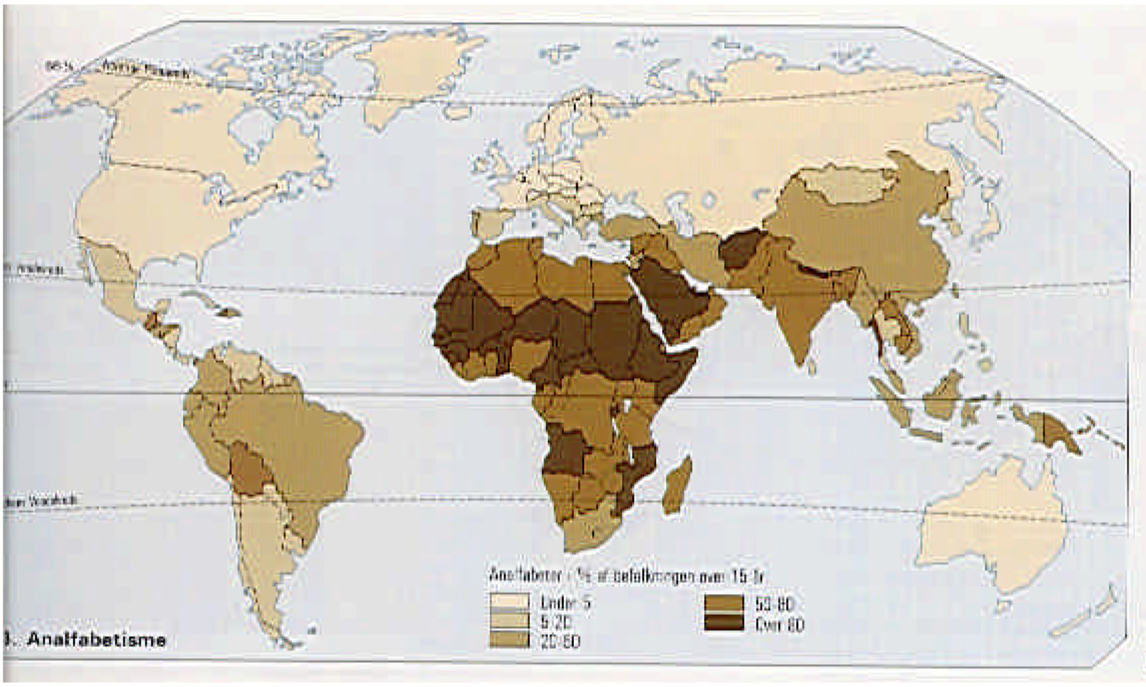
Arno Peters' verdenskort fra 1973 forener de tre muligheder at være areal-, vinkel- og beliggenhedstro, men ikke afstandstro. Denne model er brugt for alle kort i Peters' atlas, hvormed de er blevet direkte sammenlignelige, og de 60 regionale kort har den absolut mindste forvrængning, fordi hvert kort er sat i centrum, så formen er korrekt langs den centrale breddegrad. Den største formforvrængning kan ses på verdenskortet i de polare og ækvatoriale områder, hvor kontinenterne ved ækvator fremstår urealistisk langstrakte i længderetningen og kontinenterne ved polerne fremstår langstrakte i bredderetningen. Se illustrationerne på næste side.

[9] "Politikens store verdensatlas - Peters' atlas", omslagets tekst.
[10] "Geografi – fag og undervisning", s.285
[11] "Politikens store verdensatlas - Peters' atlas", forordet.

Illustrationer til teksten på side 7



Fra ”Peters’ atlas” s.121



Fra ”Folkeskolens atlas” s.55

Projektion

Et landkort er som omtalt et plant billede af en del af jordens overflade. Hvert punkt på klodens flade har sit eget billede på kortet. ”Analogt til fremvisningen af lysbilleder på en plan væg, fx via en overhead projektor, kalder vi et kort for en projektion af kuglefladen[12], også selv om kortet ikke fremkommer ved en projektion med rette linier fra et enkelt punkt.”[13]

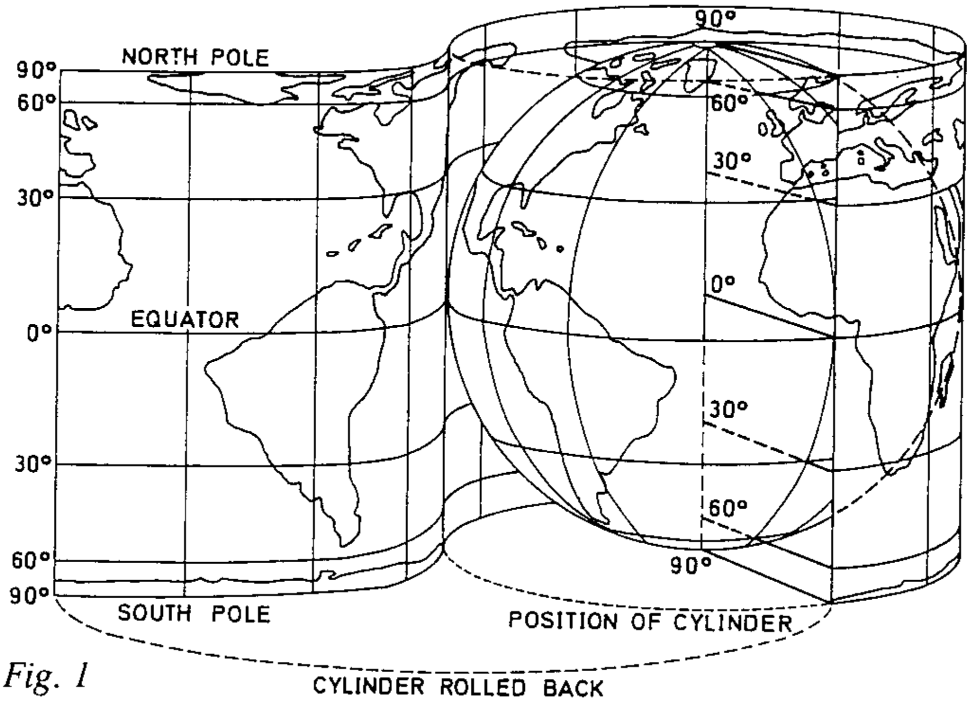


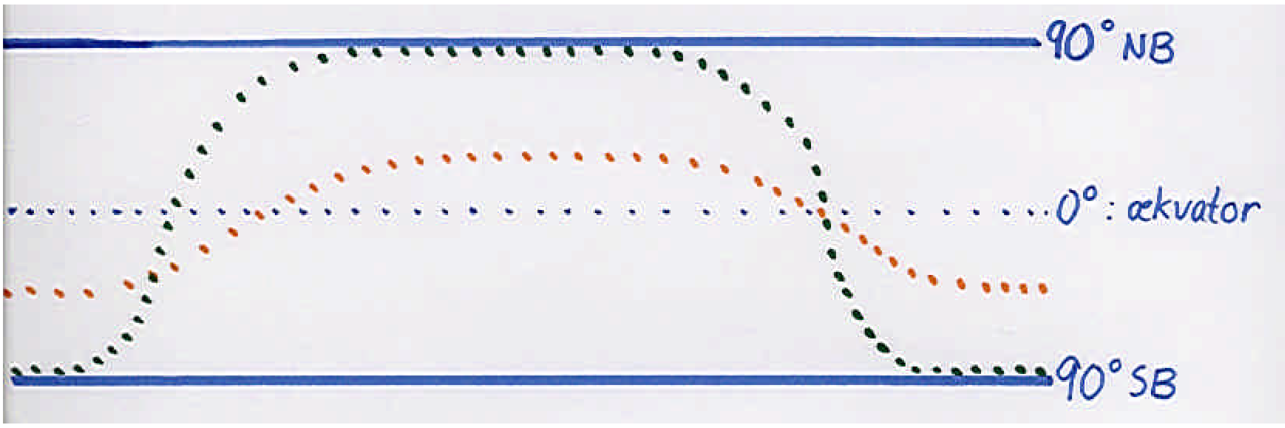
Fig. 1

Fra ”Den korteste vej..” af Mogens Esrom Larsen. Naturens verden 1984. S.191

Figur 1 er en model af den cylindriske projektion. Den er arealtro, hvilket Archimedes vidste allerede ca. 200 år f.Kr. Denne projektionsform ligger til grund for Peters’ atlas, og har netop de tidligere beskrevne fordele og ulemper, hvoraf vi kort vil kommentere to faktorer yderligere her: Såvel kompasretninger (loxodromer) som ”den korteste vej fra punkt A til punkt B” (geodæter) bliver vanskelige af bestemme på sådan et kort. Geodæterne kan ikke alle blive rette linier på kortet. På kuglefladen er geodæterne netop storcirklerne, en viden der i særdeleshed anvendes indenfor flytrafikken, hvor store afstande altid passeres langs storcirkler. De geodæter, der ikke er meridianer, vil på kortet blive krummede linier, der skærer ækvator to gange. Vi har udført en hjemmelavet cylinderprojektion fra en bold til papir af geodæter, som ikke var ækvator eller meridianer. Resultatet er illustreret på næste side.

[12] Underforstået at jorden ses idealiseret som kugleform.
[13] Frit efter ”Den korteste vej mellem to punkter på et landkort” af Mogens Esrom Larsen.

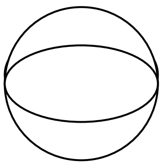
Eksempel på cylinderprojektion af to geodæter, som ikke er ækvator eller meridianer.



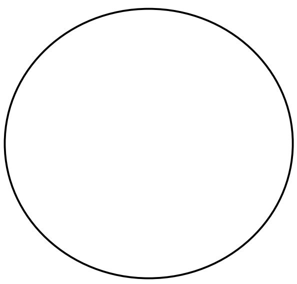
Man kan korrigere cylinderen ved at gøre den længere. Geodæterne vil stadig ikke alle blive rette linjer, men man kan gøre forholdet mellem længde- og bredderetning ensartet så loxodromerne (kompasretningerne) bliver rette linjer på kortet. ”Det er netop den berømte Mercators projektion fra 1569 (fundet af Gerhard Kremer 1512-84)).”[14]

Det afgørende ved matematiske modeller er ikke, at de er absolutte gengivelser af virkeligheden, det afgørende er, at man ved, hvordan det aktuelle fænomen man vil undersøge gengives af modellen.

Archimedes beviste ved hjælp af den arealtro projektion, at hele kuglens overflade er lig med cylinderens krumme overflade og derfor $4\pi r^2$, for cylinderhøjden er lig kuglens diameter: 2r og længden er lig kuglens omkreds: $2\pi r$ og $2r \cdot 2\pi r = 4\pi r^2$
Altså også det samme som af en cirkel med radius lig med en kugles diameter.



Kugle med r = 1
Areal: $4\pi 1^2 = 4\pi$



Cirkel med r = 2
Areal: $\pi 2^2 = 4\pi$

[14] ”Den korteste vej mellem to punkter på et landkort” af Mogens Esrom Larsen. S.192

Egne didaktiske og pædagogiske overvejelser

Vi er tilhængere af den tradition der vægter elevernes egne opdagelser og konkrete erfaringer højt i forbindelse med læring. Her forstår vi erfaringsbegrebet bredt. Fx kunne erfaring blot bestå i konkret opgaveløsning i forbindelse med tilegnelse af teori. Vi ved fra egne erfaringer at det at ”stå med problemerne i hånden” fremmer forståelsen og skærper interessen.

Eleverne skal hente viden fra konkrete ting, hvilket kan gøres ved undersøgelser og eksperimenter der også er påkrævet i CKF for matematik. Der står: ”Undersøgelser, systematiseringer og ræsonnementer er bærende for opbygningen af matematisk viden og kunnen”.
Konstruktivismen opfatter menneskets viden og erkendelse som en fortolkning, dvs. en konstruktion der bygger på sanseindtryk der forarbejdes på baggrund af nogle tankestrukturer der sætter begrænsninger for hvad vi kan lære.

Disse begrænsninger er

- dels medfødte, radikal konstruktivisme
- dels samfundsskabte, social konstruktivisme

George Kelly var en af de psykologer der koncentrerede sig om de konstruktioner mennesket danner om sin omverden. Han anså menneskets behov for at foregribe og forudsige begivenheder som udløsende faktor for udviklingen af disse konstruktioner, der skaber orden og mening.
Et konstruktivistisk syn på læring og viden tager udgangspunkt i tre hovedtemaer:

1) Ligevægt gennem selvregulering;
   en uoverensstemmelse mellem forventning og iagttagelse vil skabe en uligevægt som eleven vil forsøge at genoprette gennem tænkning og handling → selvregulering

2) Nysgerrighed og videbegærlighed.
   Vores medfødte nysgerrighed er karakteriseret ved – ifølge Carl Sagan – at vi glædes over at forstå. Den almene nysgerrighed bringer eleverne i situationer de ikke forstår, herved forstyrres ligevægten som de så søger at genskabe – de lærer og erfarer, viden dannes.

3) Tankestrukturer;
   tankestrukturer dækker over forskellige kognitive organisationer hos individet.
   Når disse strukturer er aktive og konstruerer skaber vi begreber og erindringsbilleder.
   Et væld af disse strukturer tages i brug når eleven forsøger at forstå, planlægge, løse problemer osv.

Disse tre hovedtemaer vil den lærer der tillægger sig det konstruktivistiske synspunkt (her kaldet den konstruktivistiske lærer) tage højde for i sit læringssyn – og i sin planlægning af undervisningen. Samtidig er det vigtigt at læreren tager højde for elevens udgangspunkt, da det ikke er meningen at eleven blot skal præsenteres for nyt stof hele tiden. Det er vigtigt at der er balance mellem progression og regression – ”Genkendelsens glæde”.

Den konstruktivistiske lærer ønsker at eleven selv skal undersøge og erfare.
Lærerens opgave er at hjælpe eleven på vej mod ny erkendelse ved at introducere nye begreber og tænkemåder eleven ikke selv kan skabe.
I stedet for at videregive sin viden stimulerer læreren eleven til at konstruere dennes egen forståelse.

Både lærer og elev er del af en lang proces. Læreren må tilstræbe at præge eleven til en konstant udvikling af dennes konstruktioner, derved opnås en større erkendelse / viden.
Eleven fungerer aktivt, er delvist en lærer for sig selv[15].

Matematik er et fag i rivende udvikling. Hvor det førhen var et reproducerende fag er det nu på vej til at blive et mere aktivitetspædagogisk fag[16] med eleven i centrum. I høj grad lægges der vægt på elevens egne opdagelser og erfaringer, dvs. egne tanker omkring forskellige matematiske problemstillinger.
Hvor det tidligere har handlet om det (forud-) bestemte og færdige produkt er det nu selve arbejdsprocessen der er det væsentlige.
Eleven skal i højere grad lære at udvise forståelse for bl.a. abstrakte problemer –det kunne være; ”Hvordan får man den runde jord over på et fladt kort ?” En forudsætning for at udvikle en sådan abstraktionsevne er at man har haft mulighed for at eksperimentere på det konkret operationelle niveau (jf. Piagets konkret og formelt operationelle stadier). Dette underbygges af CKF`s krav om eksperimenterende arbejdsformer.

“I situationer hvor fagets begreber og metoder anvendes sammen med andre fag, får eleverne lejlighed til at opleve matematikkens rolle i bredere sammenhænge”.[17]
Dette krav stemmer meget godt overens med vores tema; man kunne sagtens forestille sig et tværfagligt forløb om vores klode, hvor vi kombinerede

- Matematik – bl.a. geometri
- Geografi – bl.a. længde– og breddegrader.
- Historie – bl.a. inddragelse af store matematiske tænkere.

Afrunding og forslag til undervisning i emnet

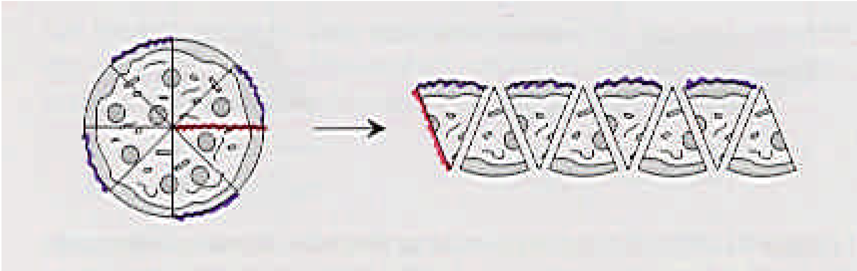
Vi vil afsluttende komme med eksempler på opgaver der er relevante at inddrage i et undervisnings-forløb om cirklen og kuglen. I et sådan forløb vil vi starte med at introducere cirklen som form, således at eleverne bliver bekendte med cirklens geometri, inden vi præsenterer dem for kuglens geometri.

Med hensyn til cirklen vil vi begynde med at lege med, og praktisere formen. Vi ville eksempelvis tegne, male, klippe, klistre og danne cirkler med os selv. Vi kunne lave Möbius bånd, og super cirkler man kunne kravle igennem og meget mere. (Til yderligere inspiration anbefales ” Cirkler ” af Cathrine Ross.) På det tidspunkt hvor eleverne har opnået konkrete erfaringer med cirklen finder vi det passende at bringe en smule teori på banen. Dette kunne fx indledes med pi`s historie:

For flere tusinde år siden opdagede matematikerne, at lige meget hvor stor en cirkel er, får man altid det samme resultat, når man dividerer omkredsen med diameteren. Dette tal kaldes pi. Tegnet p, som vi kender det i dag blev indført af den tyske matematiker Leonhard Euler i 1736. Det var allerede med Archimedes (240 f.Kr.), at ideen med at finde cirklens areal udfra omkredsen opstod, men metoden har først været udbredt siden 1700 tallet.

[15] ”Undervisning i fysik ” s.25
[16] ”Find din egen algoritme” Dan Eriksen i artikel.
[17] Faghæftet for matematik

For at forklare hvordan cirklens areal kan beregnes, er det en god illustration at opfatte cirklen som en pizza der skæres ud i meget smalle stykker, der igen sættes sammen til et rektangel.



Fra ”Matematik i læreruddannelsen – kultur, kundskab og kompetence”

Er stykkerne tilstrækkelig smalle bliver resultatet meget nær et rektangel med bredde lig med cirklens radius, og længden bliver den halve omkreds af cirklen. Benyttes arealformlen for et rektangel, får vi:

Cirklens areal = radius · ½ omkreds

For at bruge formlen skal vi kende omkredsen. Vi vil starte med at spørge eleverne om de selv har et forslag til hvordan denne evt. findes. I cirkelbogen af Catherine Ross forslås det at man holder et stykke snor stramt omkring en cylinder. Dette stykke vil, også når det er udstrakt, være lig cylinderens omkreds. Eleverne skal derefter tegne en cirkel af cylinderens bund på et stykke papir. Når cirklen er klippet ud foldes den på midten og dens diameter findes. Ved at sammenligne snorens længde med cirklens diameter ser eleverne (forhåbentlig) at diameteren er en ca. 1/3 af snorens længde. Dette kunne med gevinst afprøves med forskellige cirkelstørrelser (”dåser…”). Så vil eleverne selv opdage at forholdet mellem en cirkels omkreds og dens diameter altid er det samme.

Da det ikke altid er muligt eller praktisk at måle cirklers omkreds er det nødvendigt at eleverne også forstår at anvende formlen med indsættelse af π. Vi ved allerede flg.:

$$\pi = \text{omkreds} / \text{diameter}$$

og det kan omskrives til:

$$\text{omkreds} = \pi \cdot 2 \cdot \text{radius}$$

Som indsættes i Archimedes arealformel fra før, evt. gennem flg. trin:

$$\text{Cirklens areal} = \text{radius} \cdot \tfrac{1}{2}\,\text{omkreds} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Cirklens areal} = \text{radius} \cdot \tfrac{1}{2}\,(\pi \cdot 2 \cdot \text{radius}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\text{Cirklens areal} = \pi \cdot \text{radius}^2}$$

Efter at eleverne har arbejdet indgående med cirklen, vil vi introducere dem for kuglen.
Det kunne også sagtens tænkes at flere elever allerede i arbejdet med cirklen har vist interesse herfor. En introduktion til kuglen kunne fx være at tage eleverne med på en tur, for at se hvor i naturen og børnenes hverdag vi oplever kuglen? For at forbinde kuglen med cirkelformen kan man fx skære skiver af en kugle, evt. en appelsin, for at se, at ligegyldigt hvilket snit der laves, vil der dannes en cirkel. En cirkel som går gennem en kugles centrum kaldes en storcirkel, de andre kaldes

lillecirkler. Dette kan kobles til jordklodens længde og breddegrader, samt begrebet perfekte kugler og cirkler, herunder at jorden egentlig ikke er kugleformet.

Et videre forløb kunne handle om kortlægningen af jordens krumme overflade. Da denne form for projektion kan være svær at forstå er det ideelt at gøre sig konkrete erfaringer. Dette kunne bestå i at lade eleverne tegne jorden over på en appelsin, og bede dem forsøge at lave et kort heraf. En måde at gøre dette på, kunne være at skære appelsinen i tynde skiver som så forsigtigt skrælles, skæres op og lægges ”på plads” så de danner et landkort.

Fra ”Cirkler” af Catherine Ross.

Kuglen har den egenskab at være den af alle former der har den mindst mulige overflade i forhold til rumfanget. Af samme årsag oplever vi at dyr i hi ofte ruller sig sammen for bedre at holde på varmen. Dette gør sig også gældende når vi puster sæbebobler; sæbehinden prøver at trække sig sammen samtidig med at luften indeni presser hinden udad.

En anden måde at afbillede kuglen på et fladt stykke papir, kunne være ved hjælp af en simpel form for cylinder projektion hvor eleverne igen arbejder med konkrete materialer i form af evt. en bold og transparent. Således vil der være grundlag for at tale om de forskellige problemer der opstår ved projektion fra kugle til plan flade, herunder det traditionelle verdenskorts (Mercators) fortegnelse af kontinenternes indbyrdes areal forhold. I forlængelse af dette vil det være interessant at inddrage beregningen af kuglens areal som Archimedes beviste ca. 200 år f.Kr. Han viste at hele kuglens overflade er lig med cylinderens krumme overflade, når cylinder højden er lig kuglens diameter og bredden lig med kuglens omkreds.

$$\boxed{\text{kuglens overflade} = 2r \cdot 2\pi r = 4\pi r^2}$$

I undervisningen er det vigtigt at vi ikke lader os begrænse af vores eget undervisningsoplæg men lader os inspirere og er åbne overfor alternative vinkler på emnet. Undervisningen skal fungere som et samarbejde mellem lærer og elev, hvor begges horisonter bidrager til læringsprocessen. Når vi som lærere oplever at blive stillet spørgsmål, vi ikke på stående fod kan besvare, er det vigtigt at vi ikke affærdiger eleven, men derimod samarbejder om at nå til en forståelse.

Litteraturliste :

Andersson, Bjørn m.fl. ”Undervisning i fysik”. Gyldendal, 1992.

Balsvig, Karl-Erik m.fl. ”Folkeskolens atlas”. Gjellerup og Gad, 1994.

Bollerslev, Peter ”Matematik i læreruddannelsen - kultur, kundskab og kompetence. Gyldendalske Boghandel, Nordisk Forlag 1998.

Bøge, Kurt. ”Elementer af tallet π’s historie”. Forlaget ABACUS, 1991.

Clausen, Flemming m.fl. ”Tal og Geometri”. Munksgaard, 1996.

Clausen, Ole B. m.fl. ”Geografi – fag og undervisning”. Geografforlaget, 1999.

Eiby, Tine. Artikel: ”Find din egen algoritme”. Weekend avisen, januar 2000.

Hansen, Brita Pilegaard. ”Geografihåndbogen”. G.E.C Gad, 1991.

Hansen, Vagn Lundsgaard. ”Den geometriske dimension”. Nyt Nordisk Forlag, 1989.

Jessen, Claus m.fl. ”Geometri og funktioner”. Gyldendal, 1994.

Jessen, Claus m.fl. ”Tal, geometri og funktioner”. Gyldendal, 1997.

Larsen, Mogens Esrom. Artikel: ”Peters’ atlas”

Larsen, Mogens Esrom. Artikel: ”Den korteste vej mellem to punkter på et landkort”. Naturens Verden 1984

Koester, Thomas m.fl. ”Introduktion til psykologi”. Frydenlund, 1997.

Ross, Catherine Sheldrick. ”Cirkler”. Forlaget Thorup, 1993.

Sneeden, Robert. ”Rum”. Forlaget Carlsen, 1995.

”Faghæftet for matematik”. Undervisningsministeriet, 1995.

”Focus – Gjellerups étbinds-leksikon”. G.E.C Gad, 1987.

”Politikens store verdensatlas – Peters’ atlas”. Politikens Forlag, 1990.